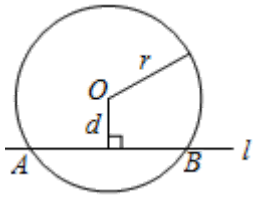
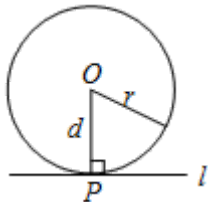
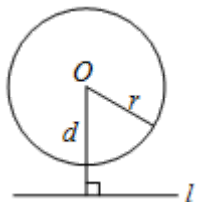


第2讲 圆的综合

一、直线与圆的位置关系

1. 直线与圆的三种位置关系

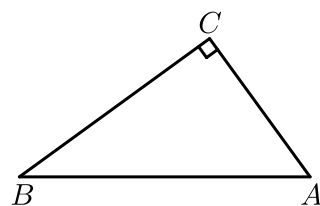
——		两 个公共点	直线 l 与 $\odot O$ 有 两 个公共点 A 、 B 时, 叫做直线 l 与 $\odot O$ 相交, 此时, 直线 l 叫做 $\odot O$ 的 割线 .
——		唯一 公共点	直线 l 与 $\odot O$ 有 唯一 公共点 P 时, 叫做直线 l 与 $\odot O$ 相切, 此时, 直线 l 叫做 $\odot O$ 的 切线, 唯一公共点 P 叫做 切点 .
——		没有 公共点	直线 l 与 $\odot O$ 没有 公共点时, 叫做直线 l 与 $\odot O$ 相离 .

💡 举个“栗”子

栗子1

1. 2019~2020学年11月天津和平区天津市第五十五中学初三上学期月考第11题 ★★★

如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$.



(1) 若以点 C 为圆心, R 为半径所作的圆与直线 AB 相切, 则 $R =$ _____ .

(2) $\odot C$ 与直线 AB 相交, 则 R 的取值范围是 _____ .

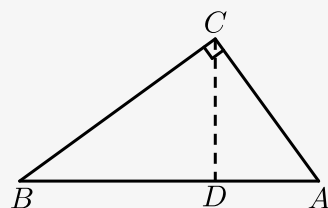
(3) $\odot C$ 与直线 AB 相离, 则 R 的取值范围是 _____ .

【答案】 (1) 4.8

(2) $R > 4.8$

(3) $0 < R < 4.8$

【解析】 (1) 作 $CD \perp AB$ 于 D 点,



$\because$ 圆与 AB 相切,

$$\therefore R = CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{6 \times 8}{10} = 4.8 .$$

(2) 若 $\odot C$ 与 AB 相交, 则

$$R > CD, \text{ 即 } R > 4.8 .$$

(3) 若 $\odot C$ 与直线 AB 相离, 则

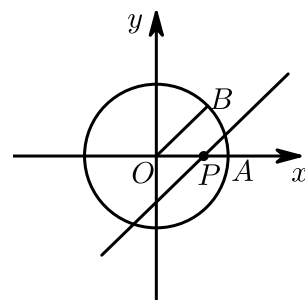
$$R < CD, \text{ 即 } 0 < R < 4.8 .$$

【标注】【知识点】直线和圆的位置关系

栗子2

2. 2018~2019学年10月天津和平区耀华嘉诚国际中学初三上学期月考第16题3分 ★★★

如图, $\odot O$ 是以数轴原点 O 为圆心, 半径为1的圆, $\angle AOB = 45^\circ$, 点 P 在数轴上运动, 过点 P 且与 OB 平行的直线与 $\odot O$ 有公共点, 则 OP 的取值范围是 _____ .



【答案】 $0 < OP \leq \sqrt{2}$

【解析】 如图, 平移过 P 点的直线到 P' , 使其与 $\odot O$ 相切, 设切点为 Q , 连接 OQ ,

由切线的性质, 得 $\angle OQP' = 90^\circ$,

$\because OB \parallel P'Q$,

$\therefore \angle OP'Q = \angle AOB = 45^\circ$,

$\therefore \triangle OQP'$ 为等腰直角三角形，

在 $\text{Rt}\triangle OQP'$ 中， $OQ = 1$ ，

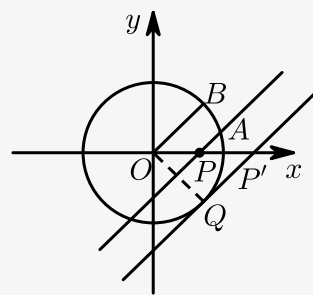
$$QP' = \frac{OQ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}，$$

$\therefore$ 当过点 P 且与 OB 平行的直线与 $\odot O$ 有公共点时，

$$0 < OP \leq \sqrt{2}，$$

当点 P 在 x 轴负半轴即点 P 向左侧移动时，结果相同。

故答案为： $0 < OP \leq \sqrt{2}$ 。



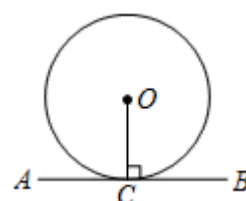
【标注】【知识点】直线和圆的位置关系

2. 切线的性质与判定

性质定理

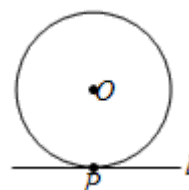
圆的切线 垂直 于过切点的 半径。

如图，若 AB 是 $\odot O$ 的切线， C 是切点，则 $OC \perp AB$ 。



①定义法：

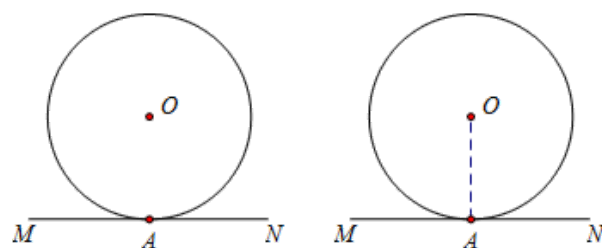
和圆只有一个公共点的直线是圆的切线。



②判定定理：

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。（当题目欲求证的直线经过圆上的点时，一般用此方法。）

方法：连半径、证垂直。



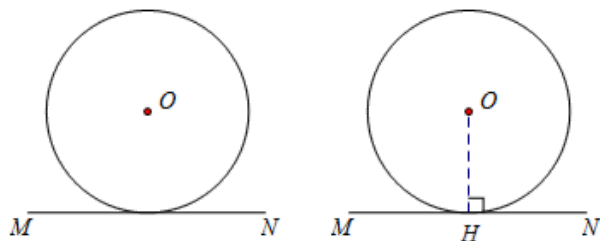
连接 OA ，证明 $OA \perp MN$ 即可推出 MN 为 $\odot O$ 的切线。

切线判定

③距离法：

圆心到直线的距离等于圆的半径的直线是圆的切线。（当题目欲求证的直线没有明确说明经过圆上的点时，一般用此方法。）

方法：作垂直、证半径。



过点 O 作 $OH \perp MN$ 于 H ，证明 $OH = r$ 即可推出 MN 为 $\odot O$ 的切线。

！总结：

1、出现圆的切线时，常连接过切点的半径，得切线垂直半径，即见切线，连半径。

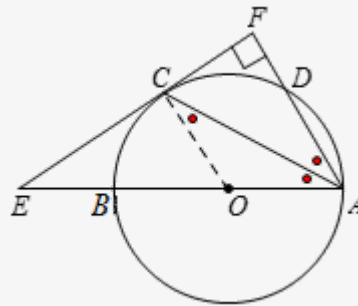
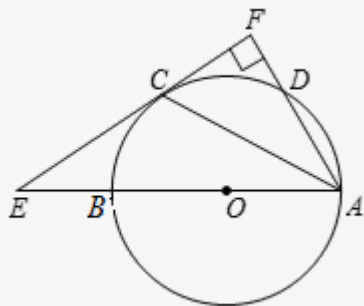
2、证明圆的切线的方法：

①若给出直线与圆有公共点：连半径、证垂直；

②若没给直线与圆的交点：作垂直、证半径。

【备注】①通过平行线+角平分线证明切线

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C, D 是 $\odot O$ 上两点，且 $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ ，过点 C 的直线 $CF \perp AD$ 于点 F ，交 AB 的延长线于点 E ，连接 AC 。

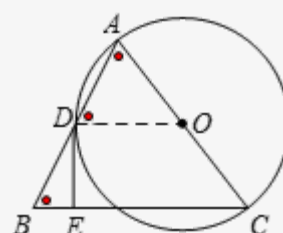
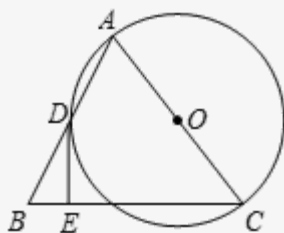


连接 OC ，

由 $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ ， $OA = OC$ ， $\angle CAD = \angle CAB = \angle OCA$ ，推出 $OC \parallel AF$ ， $\angle OCF = 90^\circ$ ，进而证明 EF 为 $\odot O$ 的切线。

②通过等腰三角形倒角证明切线

已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC$ ，以 AC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于点 D ， $DE \perp BC$ 。



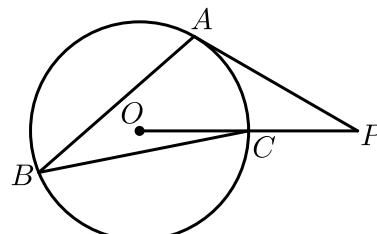
连接 OD ，

由 $AC = BC$ ， $OA = OD$ ，推出 $\angle A = \angle B = \angle ODA$ ，推出 $OD \parallel BC$ ， $\angle ODE = 90^\circ$ ，进而证明 DE 为 $\odot O$ 的切线。

栗子3

3. 2020~2021学年天津河西区初三上学期期末第8题3分 ★★

如图，已知 $\odot O$ 上三点 A ， B ， C ，半径 $OC = 1$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，切线 PA 交 OC 延长线于点 P ，则 PA 的长为（ ）。



A. 2

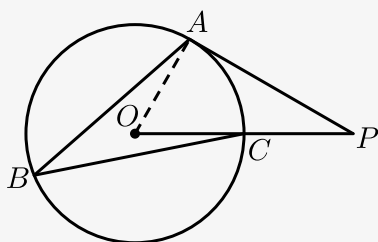
B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】连接 OA ，



$$\because \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle ABC = 60^\circ,$$

$\because$ 过点 A 作 $\odot O$ 的切线交 OC 的延长线于点 P ，

$$\therefore \angle OAP = 90^\circ, \angle P = 30^\circ,$$

$$\because OA = OC = 1,$$

$$\therefore OP = 2OA = 2,$$

$$\therefore AP = \sqrt{3}.$$

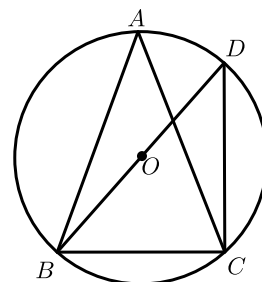
故选 B。

栗子4

4. 2021年天津中考真题第21题10分 ★★★

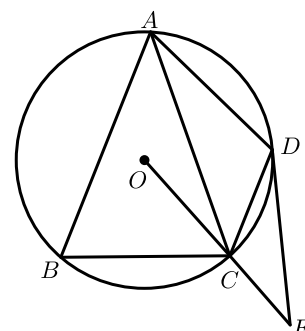
已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 42^\circ$ ，点 D 是 $\odot O$ 上一点．

(1) 如图①，若 BD 为 $\odot O$ 的直径，连接 CD ，求 $\angle DBC$ 和 $\angle ACD$ 的大小．



图①

(2) 如图②，若 $CD \parallel BA$ ，连接 AD ，过点 D 作 $\odot O$ 的切线，与 OC 的延长线交于点 E ，求 $\angle E$ 的大小．



图②

【答案】(1) 21° ．

(2) 36° ．

【解析】(1) $\because BD$ 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

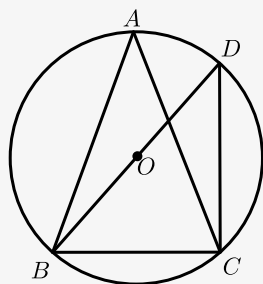
$$\because \text{在 } \odot O \text{ 中, } \angle BDC = \angle BAC = 42^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC = 90^\circ - \angle BDC = 48^\circ.$$

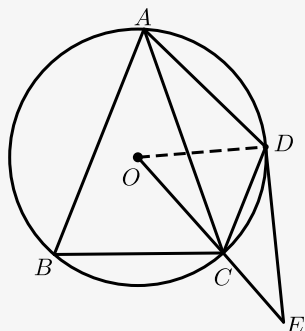
$$\because AB = AC, \angle BAC = 42^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 69^\circ.$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD - \angle ACB = 21^\circ.$$



(2) 如图, 连接 OD .



$\because CD \parallel BA$,
 $\therefore \angle ACD = \angle BAC = 42^\circ$.
 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形 , $\angle ABC = 69^\circ$,
 $\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 111^\circ$.
 $\therefore \angle DAC = 180^\circ - \angle ACD - \angle ADC = 27^\circ$.
 $\therefore \angle DOC = 2\angle DAC = 54^\circ$.
 $\because DE$ 是 $\odot O$ 的切线 ,
 $\therefore DE \perp OD$, 即 $\angle ODE = 90^\circ$.
 $\therefore \angle E = 90^\circ - \angle DOE = 36^\circ$.

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

5. 2019年天津红桥区初三中考三模第21题10分 ★★★

在 $\triangle ABC$ 中 , $\angle C = 90^\circ$, 以边 AB 上一点 O 为圆心 , OA 为半径的圆与 BC 相切于点 D , 分别交 AB , AC 于点 E , F .

(1) 如图 1 , 连接 AD , 若 $\angle CAD = 25^\circ$, 求 $\angle B$ 的大小 .

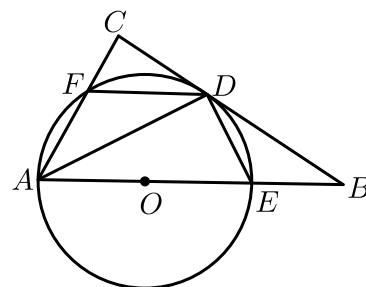


图 1

(2) 如图 2 , 若点 F 为 $\widehat{AD}$ 的中点 , $\odot O$ 的半径为 2 , 求 AB 的长 .

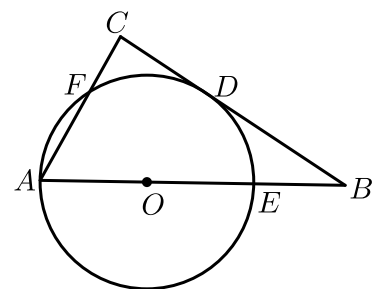


图 2

【答案】(1) $\angle B = 40^\circ$.

(2) $AB = 6$.

【解析】(1) 连接 OD ,

$\because OA$

为半

径的

圆与

BC

相切

于点

D ,

$\therefore OD \perp BC$,

$\therefore \angle ODB = 90^\circ$,

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle ODB = \angle C$,

$\therefore OD \parallel AC$,

$\therefore \angle CAD = \angle ADO = 25^\circ$,

$\because OA = OD$,

$\therefore \angle OAD = \angle ODA = 25^\circ$,

$\therefore \angle BOD = 2\angle OAD = 50^\circ$,

$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BOD = 40^\circ$.

(2) 连接 OF , OD ,

由 (

1)

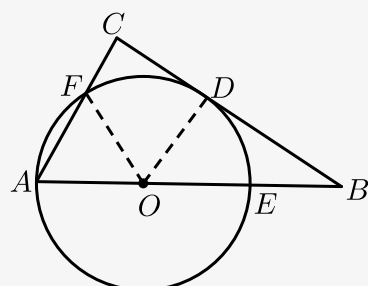


图 2

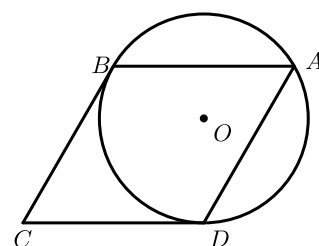
得： $OD \parallel AC$,
 $\therefore \angle AFO = \angle FOD$,
 $\because OA = OF$, 点 F 为 $\widehat{AD}$ 的中点 ,
 $\therefore \angle A = \angle AFO$, $\angle AOF = \angle FOD$,
 $\therefore \angle A = \angle AFO = \angle AOF = 60^\circ$,
 $\therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 30^\circ$,
 $\because OA = OD = 2$,
 $\therefore OB = 2OD = 4$,
 $\therefore AB = OA + OB = 6$.

【标注】【知识点】圆与等腰+平行线

6. 2021年天津河东区初三中考一模第21题10分 ★★★

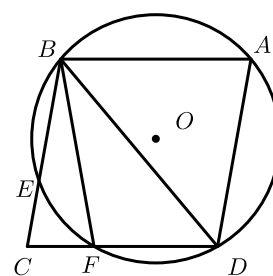
已知， $ABCD$ 为菱形，点 A ， B ， D 在 $\odot O$ 上．

(1) 如图①，若 CB ， CD 为 $\odot O$ 的切线，求 $\angle C$ 的大小．



图①

(2) 如图②， BC ， CD 与 $\odot O$ 分别交于点 E ，点 F ，连接 BF ，若 $\angle BDC = 50^\circ$ ，求 $\angle CBF$ 的度数．

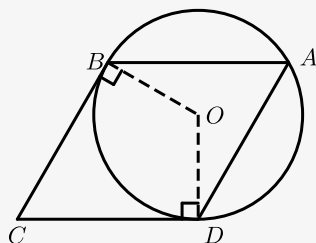


图②

【答案】(1) 60° .

(2) 20° .

【解析】(1) 连接 OB 、 OD ,



图①

$\because CB、CD$ 为 $\odot O$ 切线，

$\therefore OB \perp BC, OD \perp CD$ ，

$\because$ 同一条弧所对的圆周角等于它所对应的圆心角的一半，

$\therefore \angle BOD = 2\angle BAD$ ，

$\because ABCD$ 为菱形，

$\therefore \angle C = \angle BAD$ ，

四边形内角和为 360° ，

$\therefore \angle C + \angle BOD + \angle CBO + \angle CDO = 360^\circ$ ，

$\therefore 180^\circ = \angle C + \angle BOD = \angle C + 2\angle BAD = \angle C + 2\angle C = 3\angle C$ ，

$\therefore \angle C = 60^\circ$ 。

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形， $AB = AD = BC = CD$ ， $\angle BAD = \angle BCD$ ，

$\because CB = CD$ ，

$\therefore \angle BDC = \angle CBD = 50^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD = 80^\circ$ ，

$\because$ 圆内同一条弦对应的圆周角 $\angle BFD$ ， $\angle BAD$ 所对应的弧不同，

$\therefore \angle BFD + \angle BAD = 180^\circ$ ，

$\because \angle BAD = \angle BCD$ ，

$\therefore \angle BFD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ ，

$\because \angle BCD + \angle CBF = \angle BFD$ ，

$\therefore \angle CBF = \angle BFD - \angle BCD = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$ 。

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

栗子5

7. 2020年天津滨海新区初三中考一模第21题 ★★★

已知 AB 为 $\odot O$ 的直径， $OC \perp AB$ ，弦 DC 与 OB 交于点 F ，在直线 AB 上有一点 E ，连接 ED ，且有 $ED = EF$ 。

(1) 如图1，求证 ED 为 $\odot O$ 的切线。

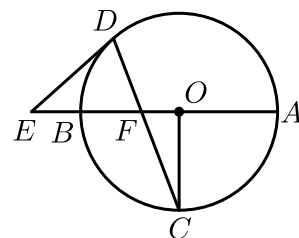


图 1

(2) 如图 2, 直线 ED 与切线 AG 相交于 G , 且 $OF = 1$, $\odot O$ 的半径为 3, 求 AG 的长.

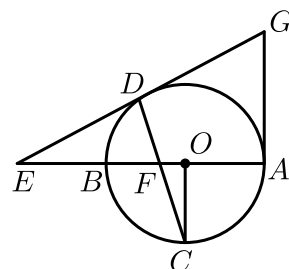


图 2

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 6.

【解析】 (1) 连接 OD , 如图 1 所示.

$$\because ED = EF,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle EFD,$$

$$\because \angle EFD = \angle CFO,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle CFO.$$

$$\because OD = OC,$$

$$\therefore \angle ODF = \angle OCF.$$

$$\because OC \perp AB,$$

$$\therefore$$

$$\angle CFO + \angle OCF = \angle EDF + \angle ODF = \angle EDO = 90^\circ,$$

$$\therefore ED \text{ 为 } \odot O \text{ 的切线.}$$

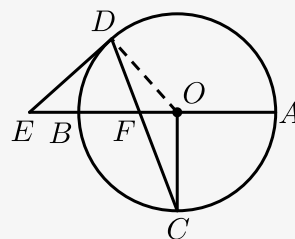


图 1

(2) 连接 OD , OG , 如图 2 所示.

由 (1) 可知 $\triangle EDO$ 为直角三角形, $OF = 1$,

设 $ED = EF = a$, $EO = EF + FO = a + 1$,

由勾股定理得: $EO^2 = ED^2 + DO^2$,

$$\text{即 } (a + 1)^2 = a^2 + 3^2,$$

解得: $a = 4$,

即 $ED = 4$, $EO = 5$.

$\because \odot O$ 的半径为 3,

$$\therefore EA = 8,$$

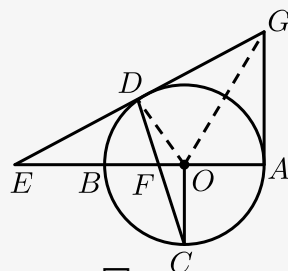


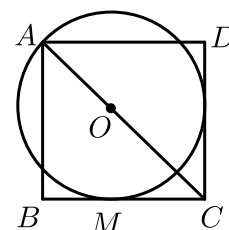
图 2

$\therefore$ 直线 ED 与切线 AG 相交于 G ，由 (1) 可知 ED 为 $\odot O$ 的切线，
 $\therefore \triangle GDO \cong \triangle GAO$ (HL)
 $\therefore DG = AG$ ，
 $\therefore$ 在 $Rt\triangle GEA$ 中， $EG^2 = EA^2 + AG^2$ ，
 $\therefore (4 + AG)^2 = 8^2 + AG^2$ ，
 $\therefore AG = 6$ 。

【标注】【知识点】圆与勾股

8. 2017~2018 学年 12 月天津和平区天津市第二南开中学初三上学期月考第 21 题 10 分 ★★

如图， O 为正方形 $ABCD$ 对角线 AC 上一点，以 O 为圆心， OA 长为半径的 $\odot O$ 与 BC 相切于点 M 。



- (1) 求证： CD 与 $\odot O$ 相切。
 (2) 若 $\odot O$ 的半径为 1，求正方形 $ABCD$ 的边长。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $\frac{\sqrt{2} + 2}{2}$ 。

【解析】 (1) 过 O 作 $ON \perp CD$ 于 N ，连接 OM ，

$\because \odot O$ 与 BC 相切于点 M ，

$\therefore OM \perp BC$ 。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore \angle B = 90^\circ$ ， $AB \parallel CD$ 。

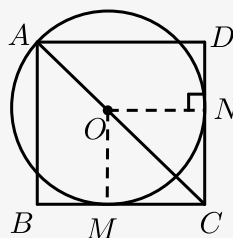
$\therefore AB \parallel OM \parallel DC$ 。

$\because AC$ 为正方形 $ABCD$ 对角线，

$\therefore \angle NOC = \angle NCO = \angle MOC = \angle MCO = 45^\circ$ 。

$\therefore OM = ON$ ，

$\therefore CD$ 与 $\odot O$ 相切。



(2) 由 (1) 易知 $\triangle MOC$ 为等腰直角三角形， OM 为半径，

$\therefore OM = MC = 1$ 。

$\therefore OC^2 = OM^2 + MC^2 = 1 + 1 = 2$ 。

$\therefore OC = \sqrt{2}$ 。

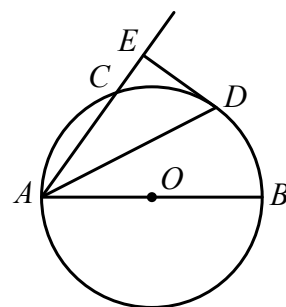
$\therefore AC = AO + OC = 1 + \sqrt{2}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = BC$,
 有 $AC^2 = AB^2 + BC^2$,
 $\therefore 2AB^2 = AC^2$.
 $\therefore AB = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$.
 故正方形 $ABCD$ 的边长为 $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$.

【标注】【知识点】圆与勾股

9. 2018~2019学年北京朝阳区陈经纶中学初三上学期期中第23题6分 ★★★

如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 与 $\odot O$ 交于点 C , $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D , $DE \perp AC$, 垂足为 E .

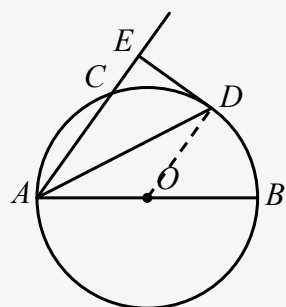


- (1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线.
 (2) 若直径 $AB = 10$, 弦 $AC = 6$, 求 DE 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 4.

【解析】 (1) 连接 OD .

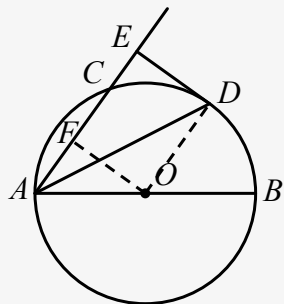


$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,
 $\therefore \angle OAD = \angle CAD$,
 $\because OA = OD$,
 $\therefore \angle OAD = \angle ODA$,
 $\therefore \angle ODA = \angle CAD$,
 $\therefore OD \parallel AC$,
 $\because DE \perp AC$, 即 $\angle AED = 90^\circ$,

$\therefore \angle ODE = 90^\circ$, 即 $DE \perp OD$,

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线 .

(2) 作 $OF \perp AC$, 垂足为 F .



$$\therefore AF = \frac{1}{2}AC = 3 ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AFO$ 中 , $AF^2 + OF^2 = AO^2$, $AO = \frac{1}{2}AB = 5$,

$$\therefore 3^2 + OF^2 = 5^2 ,$$

$$\therefore OF = 4 ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ODE = \angle OFE = 90^\circ ,$$

$\therefore$ 四边形 $ODEF$ 是矩形 ,

$$\therefore DE = OF = 4 .$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】勾股定理

【知识点】切线的判定定理

【知识点】切线的性质定理

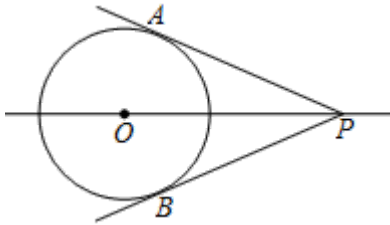
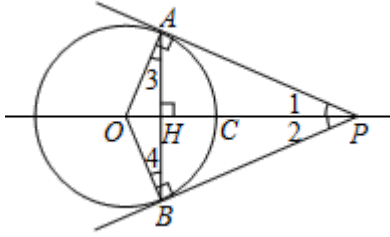
【知识点】矩形的判定及应用

【知识点】角的平分线及等分线的定义

【知识点】平行线的性质

【知识点】平行线判定

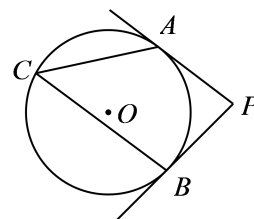
3. 切线长定理

切线长	经过 圆外 一点的圆的切线上，这点和切点之间线段的长，叫做这点到圆的切线长。 如图，过圆外一点 P 有两条直线 PA、PB 分别与 $\odot O$ 相切，线段 PA、PB 的长叫 $\odot O$ 的切线长。 
切线长定理	从 圆外 一点引圆的两条切线，它们的切线长 相等，这一点和圆心的连线 平分 两条切线的夹角。 如图，过 $\odot O$ 外一点 P 引 $\odot O$ 的两条切线 PA、PB，切点分别为 A、B。  【结论】：$\text{Rt}\triangle AOP \cong \text{Rt}\triangle BOP$，$PA = PB$，$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$，$OP$ 垂直平分 AB，$\widehat{AC} = \widehat{BC}$。

栗子6

10. 天津滨海新区初三毕业考试第7题3分 ★★

如图， PA 、 PB 分别切 $\odot O$ 于 A 、 B ，若 $\angle C = 56^\circ$ ，则 $\angle P$ 的大小为（ ）。



A. 68°

B. 67°

C. 66°

D. 60°

【答案】 A

【解析】 连接 OA 、 OB ，

$\because PA$ 、 PB 分别是 $\odot O$ 的切线，

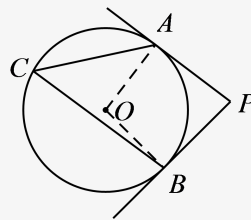
$\therefore OA \perp PA$ ，

$\therefore \angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ ，

$\because \angle C = 56^\circ$ ，

$\therefore \angle AOB = 2\angle C = 2 \times 56^\circ = 112^\circ$ ，

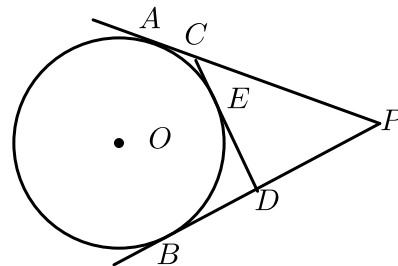
$\therefore \angle P = 360^\circ - \angle OAP - \angle OBP - \angle AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 112^\circ = 68^\circ$ 。



【标注】 【知识点】 切线长定理

11. 2019~2020学年天津河北区初三上学期期中第6题3分 ★★

如图， PA 、 PB 切 $\odot O$ 于点 A 、 B ， $PA = 10$ ， CD 切 $\odot O$ 于点 E ，交 PA 、 PB 于 C 、 D 两点，则 $\triangle PCD$ 的周长是（ ）。



A. 10

B. 18

C. 20

D. 22

【答案】 C

【解析】 $\because PA$ 、 PB 切 $\odot O$ 于点 A 、 B ， CD 切 $\odot O$ 于点 E ，

$\therefore PA = PB = 10$ ， $CA = CE$ ， $DE = DB$ ，

$\therefore \triangle PCD$ 的周长

$= PC + CD + PD$

$= PC + AC + DB + PD$

$= PA + PB$

$= 10 + 10$

$= 20$

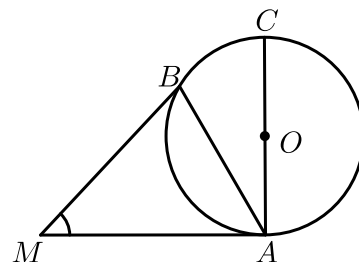
故选：C。

【标注】 【知识点】 切线长定理

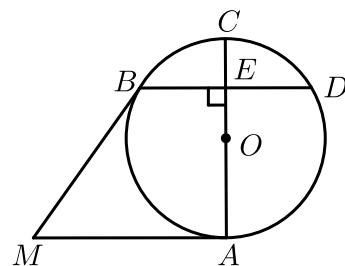
12. 2012年天津中考真题第22题 ★★★

已知 $\odot O$ 中， AC 为直径， MA 、 MB 分别切 $\odot O$ 于点 A 、 B 。

(1) 如图，若 $\angle BAC = 25^\circ$ ，求 $\angle AMB$ 的大小。



(2) 如图，过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 E ，交 $\odot O$ 于点 D ，若 $BD = MA$ ，求 $\angle AMB$ 的大小。



【答案】 (1) 50° .

(2) 60° .

【解析】 (1) $\because MA$ 切 $\odot O$ 于点 A ，有 $\angle MAC = 90^\circ$.

又 $\angle BAC = 25^\circ$,

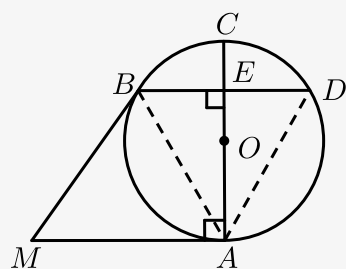
$\therefore \angle MAB = \angle MAC - \angle BAC = 65^\circ$.

$\because MA$ 、 MB 分别切 $\odot O$ 于点 A 、 B ,

$\therefore MA = MB$, 有 $\angle MAB = \angle MBA$.

$\therefore \angle AMB = 180^\circ - (\angle MAB + \angle MBA) = 50^\circ$.

(2) 如图，连接 AD 、 AB .



$\because MA \perp AC$, 又 $BD \perp AC$,

$\therefore BD \parallel MA$.

又 $BD = MA$,

$\therefore$ 四边形 $MADB$ 是平行四边形 .

$\because MA = MB$,

$\therefore$ 四边形 $MADB$ 是菱形，有 $AD = BD$.

又 AC 为直径, $AC \perp BD$, 得 $\widehat{AB} = \widehat{AD}$, 有 $AB = AD$.

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形, 有 $\angle D = 60^\circ$.

$\therefore$ 在菱形 $MADB$ 中, $\angle AMB = \angle D = 60^\circ$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】正多边形与圆

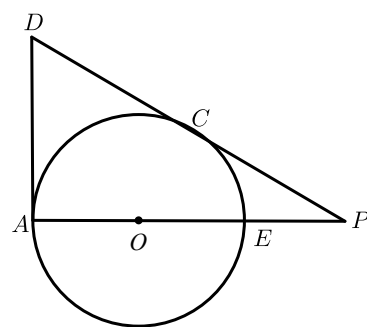
【知识点】圆内接四边形综合

【知识点】切线的性质定理

13. 2021年天津和平区初三中考二模第21题10分 ★★★

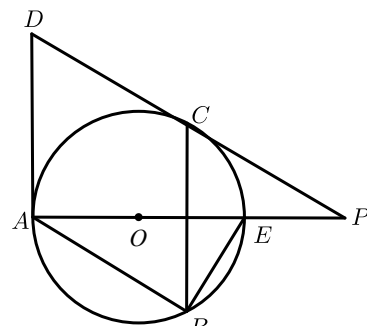
已知 DA , DC 分别与 $\odot O$ 相切于点 A , C , 延长 DC 交直径 AE 的延长线于点 P .

(1) 如图①, 若 $DC = PC$, 求 $\angle P$ 的度数.



图①

(2) 如图②, 在 $\odot O$ 上取一点 B , 连接 AB , BC , BE , 当四边形 $ABCD$ 是平行四边形时, 求 $\angle P$ 及 $\angle AEB$ 的大小.



图②

【答案】 (1) 30° .

(2) $\angle P = 60^\circ$, $\angle AEB = 60^\circ$.

【解析】 (1) $\because DA$, DC 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore DA = DC$, $OA \perp DA$.

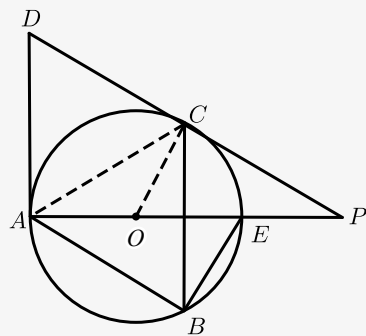
$\therefore \angle DAO = 90^\circ$,

$\because DC = PC$,

$\therefore DA = DC = PC$.

$$\begin{aligned} \because \angle DAP &= 90^\circ, \\ \therefore \sin P &= \frac{AD}{DP} = \frac{1}{2}, \\ \therefore \angle P &= 30^\circ. \end{aligned}$$

(2) 连接 OC , AC ,



$$\begin{aligned} \because DA, DC &\text{是} \odot O \text{的切线}, \\ \therefore DA &= DC. \\ \because \text{四边形 } ABCD &\text{是平行四边形}, \\ \therefore \text{平行四边形 } ABCD &\text{是菱形}. \\ \therefore DA &= DC = CB = AB, \angle ABC = \angle ADC. \\ \because \angle AOC &= 2\angle ABC, \\ \therefore \angle AOC &= 2\angle ADC. \\ \because DA, DC &\text{是} \odot O \text{的切线}, \\ \therefore OA \perp AD, OC \perp DC. \\ \therefore \angle DAO &= \angle DCO = 90^\circ. \\ \because \angle ADC + \angle DCO + \angle AOC + \angle DAO &= 360^\circ, \\ \therefore \angle ADC + \angle AOC &= 180^\circ, \\ \therefore 3\angle ADC &= 180^\circ. \\ \therefore \angle ADC &= 60^\circ. \\ \therefore \angle P &= 90^\circ - \angle ADC = 30^\circ, \angle ABC = 60^\circ. \\ \text{又 } AB &= BC, \\ \therefore \triangle ABC &\text{是等边三角形}. \\ \therefore \angle ACB &= 60^\circ, \\ \therefore \angle AEB &= \angle ACB = 60^\circ. \end{aligned}$$

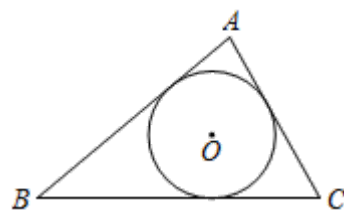
【标注】【知识点】切线长定理

4. 三角形的内切圆

三角形内切圆

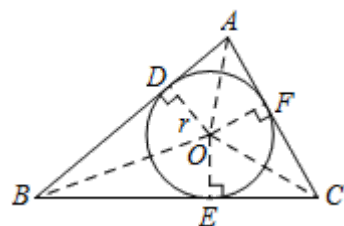
与三角形 各边 都相切的圆叫做三角形的内切圆，内切圆的圆心叫做三角形的 内心。这个三角形叫做圆的外切三角形。

如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆， $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的外切三角形，点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心。



三角形有且只有 一个 内切圆，内心是三条 角平分线 的交点，内心到三边的距离相等，且等于三角形内切圆的半径。

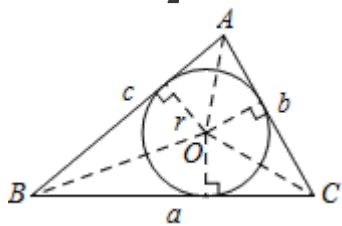
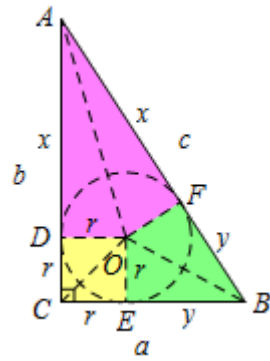
如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，则 OA 平分 $\angle BAC$ ， OB 平分 $\angle ABC$ ， OC 平分 $\angle ACB$ ；
 $OD = OE = OF = r$ 。



【备注】 任何三角形都有唯一的外接圆和内切圆，而一个圆的内接三角形和外切三角形都有无数个。

三角形外接圆的圆心叫做三角形的外心，是三角形三条垂直平分线的交点。

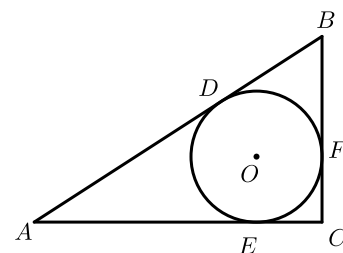
与三角形内切圆有关的两个重要结论

任意三角形	若三角形三边长分别为 a、b、c，内切圆半径为 r，则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r$。 
直角三角形	如果直角三角形的两直角边长分别为 a、b，斜边长为 c，则直角三角形的内切圆的半径 $r = \frac{a+b-c}{2}$。 

栗子8

14. 2021年天津河北区初三中考零模第11题3分 ★★

如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 5$ ， $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的三边相切于点 D 、 E 、 F ，若 $\odot O$ 的半径为 2，则 $\triangle ABC$ 的周长为（ ）。



A. 14

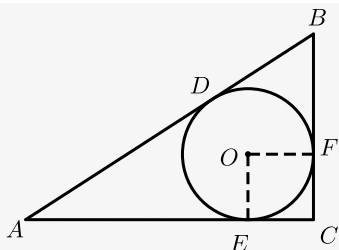
B. 20

C. 24

D. 30

【答案】D

【解析】连接 OE 、 OF ，



设 $AD = AE = x$ ，由切线长定理得 $AE = x$ ，

$\because \odot O$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三边分别点 D 、 E 、 F ，

$\therefore OE \perp AC$ ， $OF \perp BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $OECF$ 为正方形，

$\because \odot O$ 的半径为 2， $BC = 5$ ，

$\therefore CE = CF = 2$ ， $BD = BF = 3$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$ ，

即 $(x+2)^2 + 5^2 = (x+3)^2$ ，

解得 $x = 10$ ，

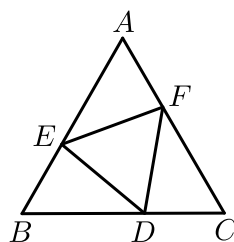
$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $12 + 5 + 13 = 30$ 。

故选 D。

【标注】【知识点】切线长定理

15. 2020年天津河西区初三中考二模第11题3分 ★★

如图，点 D ， E ， F 分别在正三角形 ABC 的三边上，且 $\triangle DEF$ 也是正三角形。若 $\triangle ABC$ 的边长为 a ， $\triangle DEF$ 的边长为 b ，则 $\triangle FDC$ 的内切圆半径为（ ）。



A. $\frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b}{8}$

B. $\frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b}{6}$

C. $\frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b}{4}$

D. $\frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b}{2}$

【答案】 B

【解析】 $\because \angle B + \angle BED = \angle EDF + \angle FDC$ ，

$$\angle B = \angle EDF = 60^\circ，$$

$$\therefore \angle BED = \angle FDC，$$

$\therefore$ 在 $\triangle BED$ 和 $\triangle CDF$ 中，

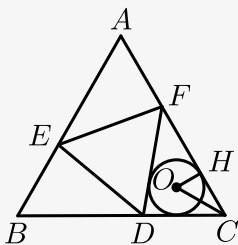
$$\begin{cases} \angle B = \angle C \\ \angle BED = \angle CDF, \\ DE = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle BED \cong \triangle CDF (\text{AAS})$,

$$\therefore CF + CD = BD + CD = a,$$

设 $\triangle FDC$ 内切圆圆心为 O , 与 AC 相切于 H ,

连 OH , OC ,



$$CH = \frac{CF + CD - DF}{2} = \frac{a - b}{2},$$

$$\therefore \angle OCH = \frac{1}{2} \angle ACB = 30^\circ,$$

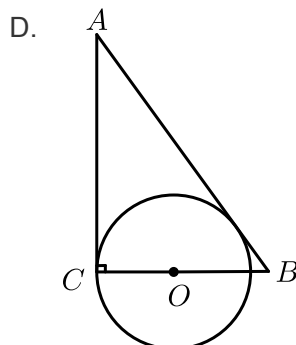
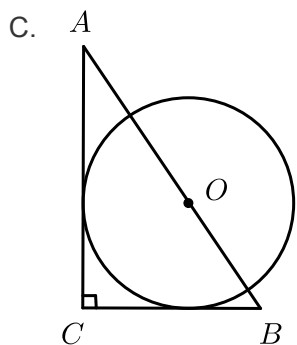
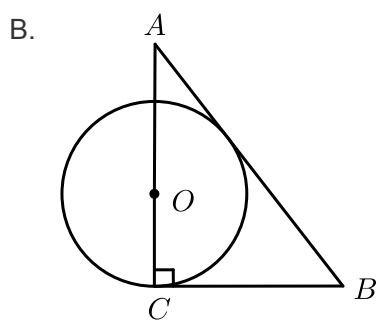
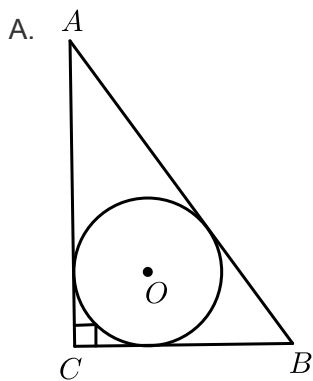
$$\therefore OH = CH \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6} (a - b),$$

故选 B.

【标注】【知识点】AAS

16. 2019~2020学年天津河北区初三上学期期末第9题3分 ★★

已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\odot O$ 与三角形的边相切, 下列选项中, $\odot O$ 的半径为 $\frac{ab}{a+b}$ 的是 ().



【答案】C

【解析】A选项： O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，

$$\therefore O \text{ 的半径} = \frac{a+b-c}{2},$$

$\therefore$ A不正确.

B选项： $\therefore$ 与 AB ， BC 相切，

$$\therefore r^2 + (c-a)^2 = (b-r)^2$$

$$\therefore r = \frac{(a+b-c)(b+c-a)}{2b},$$

$\therefore$ B不正确.

C选项： O 与 AC ， BC 相切，圆心

在 AB 上，

$$\therefore \frac{b-r}{b} = \frac{r}{a},$$

$$\therefore r = \frac{ab}{a+b},$$

$\therefore$ C正确.

D选项：与 AB ， AC 相切，圆心在

BC 上，

$$\therefore (a-r)^2 = r^2 + (c-b)^2,$$

$$\therefore r = \frac{(a+c-b)(a-c+b)}{2a},$$

$\therefore$ D不正确.

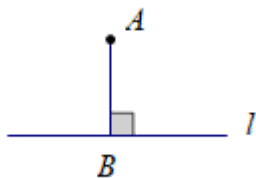
故选 C.

【标注】【知识点】直线和圆的位置关系

二、圆中最值问题

1. 垂线段最短

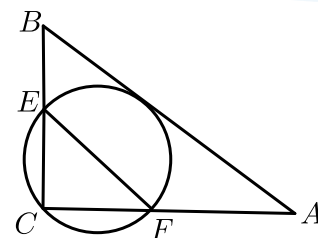
解题原理：点到直线的距离——垂线段最短。



栗子9

17. 2019~2020学年12月天津河东区天津市育才中学初三上学期月考第11题3分 ★★

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$ ，经过点 C 且与边 AB 相切的动圆与 CB ， CA 分别相交于点 E ， F ，则线段 EF 长度的最小值是（ ）。



A. $4\sqrt{2}$

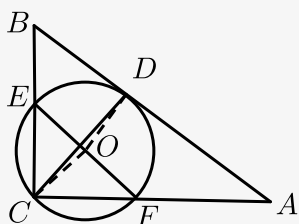
B. 4.75

C. 5

D. 4.8

【答案】 D

【解析】 如图, $\because \angle ACB = 90^\circ$,



$\therefore EF$ 是直径,

设 EF 的中点为 O , 圆 O 与 AB 的切点为 D ,

连接 OD , CO , CD , 则 $OD \perp AB$.

$\because AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore EF$ 为直径, $OC + OD = EF$,

$\therefore CO + OD > CD = 4.8$,

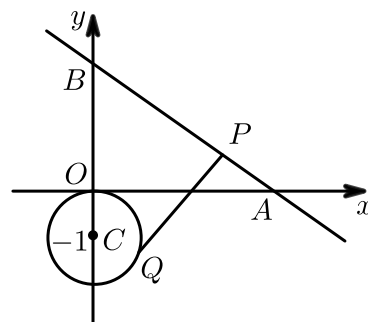
$\therefore$ 当点 O 在直角三角形 ABC 的斜边 AB 的高上 CD 时, $EF = CD$ 有最小值,

$\therefore$ 由三角形面积公式得: $CD = BC \cdot AC \div AB = 4.8$.

【标注】 【知识点】圆与最值问题

18. 2017~2018学年天津河西区初三上学期期末第18题3分 ★★★

如图, 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ; 点 Q 是以 $C(0, -1)$ 为圆心、1 为半径的圆上一动点, 过 Q 点的切线交线段 AB 于点 P , 则线段 PQ 的最小是 _____.



【答案】

$$\frac{\sqrt{231}}{5}$$

【解析】过点 C 作 $CP \perp$ 直线 AB 于点 P ，过点 P 作 $\odot C$ 的切线 PQ ，切点为 Q ，此时 PQ 最小，连接 CQ ，如图所示。

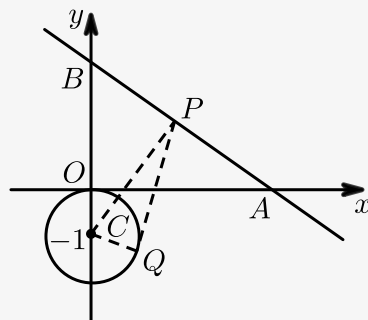
直线 AB 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ ，即 $3x + 4y - 12 = 0$ ，

$$\therefore CP = \frac{|-4 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{16}{5}.$$

$\because PQ$ 为 $\odot C$ 的切线，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CQP$ 中， $CQ = 1$ ， $\angle CQP = 90^\circ$ ，

$$\therefore PQ = \sqrt{CP^2 - CQ^2} = \frac{\sqrt{231}}{5}.$$



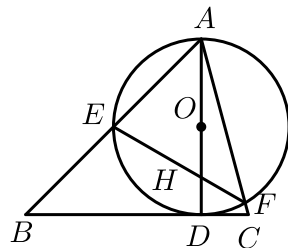
【标注】【知识点】勾股定理与实际问题

【知识点】勾股定理的综合应用

【知识点】切线的性质定理

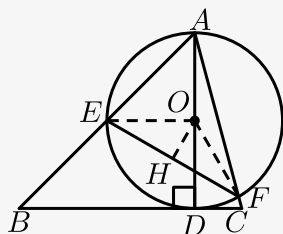
19. 2012年浙江宁波中考真题第18题3分 ★★★★★

如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{2}$ ， D 是线段 BC 上的一个动点，以 AD 为直径画 $\odot O$ 分别交于 AB 、 AC 于 E 、 F ，连接 EF ，则线段 EF 长度的最小值为 _____。



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】连接 OE 、 OF ，



$\because \angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle EOF = 2\angle BAC = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle OEF = \angle OFE = 30^\circ$ ，

$\therefore EF = \sqrt{3}OE$ ，

$\therefore$ 当直径 AD 最小时， EF 最小。

$\therefore EF$ 最小时， AD 与 BC 垂直。

$$AB = 2\sqrt{2}, \angle ABC = 45^\circ,$$

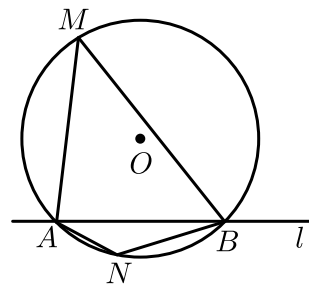
$$\therefore AD = 2, OA = 1,$$

$$\therefore EF \text{ 最小值为 } \sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】圆的定义

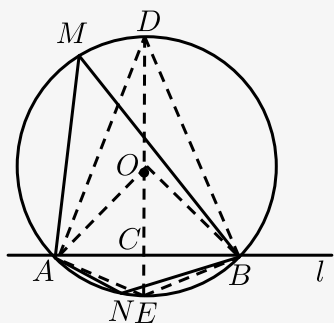
20. 2014年陕西中考真题第16题3分 ★★★

已知 $\odot O$ 的半径是2，直线 l 与 $\odot O$ 相交于 A 、 B 两点， M 、 N 是 $\odot O$ 上的两个动点，且在直线 l 的异侧，若 $\angle AMB = 45^\circ$ ，则四边形 $MANB$ 面积的最大值是_____.



【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】过点 O 作 $OC \perp AB$ 于 C ，交 $\odot O$ 于 D 、 E 两点，连结 OA 、 OB 、 DA 、 DB 、 EA 、 EB ，如图，



$$\because \angle AMB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 2\angle AMB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle OAB$ 为等腰直角三角形，

$$AB = \sqrt{2}OA = 2\sqrt{2},$$

$$\because S_{\text{四边形}MANB} = S_{\triangle MAB} + S_{\triangle NAB},$$

$\therefore$ 当 M 点到 AB 的距离最大， $\triangle MAB$ 的面积最大；

当 N 点到 AB 的距离最大时， $\triangle NAB$ 的面积最大，

即 M 点运动到 D 点， N 点运动到 E 点，

此时四边形 $MANB$ 面积的最大值

$$S_{\text{四边形}DAEB} = S_{\triangle DAB} + S_{\triangle EAB}$$

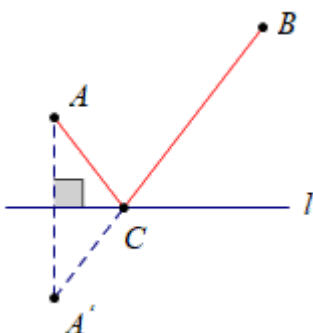
$$= \frac{1}{2}AB \times CD + \frac{1}{2}AB \times CE$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} AB \times (CD + CE) \\
&= \frac{1}{2} AB \times DE \\
&= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4 \\
&= 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

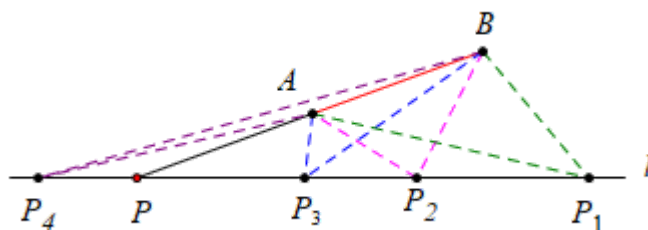
【标注】【知识点】圆中最值

2. 将军饮马最值

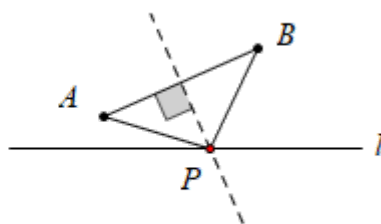
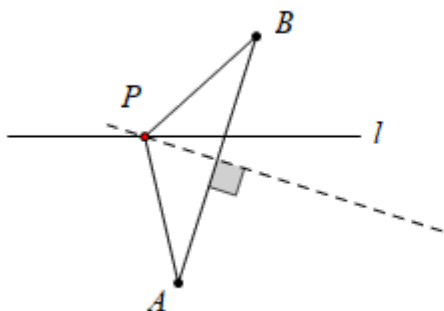
将军饮马模型：求线段和的最小值问题。



线段差的最大值： $|PA - PB|_{\max} = AB$ 。



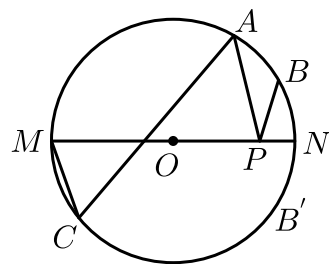
线段差的最小值： $|PA - PB|_{\min} = 0$ 。



栗子10

21. 2019~2020学年天津和平区初三上学期期中第9题3分 ★★★

如图， MN 是 $\odot O$ 的直径， A 、 B 、 C 是 $\odot O$ 上的三点， $\angle ACM = 60^\circ$ ， B 点是 $\widehat{AN}$ 的中点， P 点是 MN 上一动点，若 $\odot O$ 的半径为1，则 $PA + PB$ 的最小值为（ ）。



A. 1

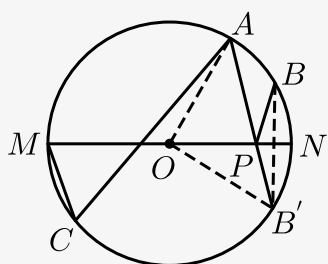
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3} - 1$

【答案】 C

【解析】 如图，



过点 B 作关于 MN 的对称点 B' ，连接 AB' 交 MN 于点 P ， $PA + PB$ 此时最小。

连接 AO 、 $B'O$ 。

$\because \angle ACM = 60^\circ$ ，

$\therefore \widehat{AM}$ 的度数为 120° ，

$\therefore \widehat{AN}$ 的度数为 60° ，

$\therefore \widehat{B'N}$ 的度数为 30° ，

$\therefore \widehat{AB'}$ 的度数为 90° ，

$\therefore \angle AOB' = 90^\circ$ ，

$\because AO = B'O = 1$ ，

$\therefore AB' = \sqrt{2}$ ，

$\therefore (PA + PB)_{\min} = \sqrt{2}$ 。

故选 C。

【标注】 【知识点】 圆与最值问题

3. 中位线

三角形的中位线等于 第三边的一半；有时也可以通过构造中位线解题。

栗子11

22. 2018~2019学年天津和平区初三上学期期中第17题3分 ★★★

回答下列问题：

(1) 圆中最长的弦是 _____ .

(2) 如图①, AB 是 $\odot O$ 的弦, $AB = 8$, 点 C 是 $\odot O$ 上的一个动点, 且 $\angle ACB = 45^\circ$, 若点 M 、 N 分别是 AB 、 AC 的中点, 则 MN 长度的最大值是 _____ .

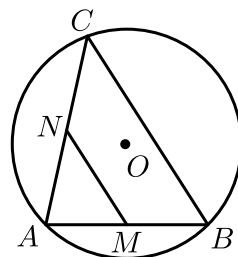


图 ①

【答案】 (1) 直径

(2) $4\sqrt{2}$

【解析】 (1) 直径是圆中最长的弦,

故答案为: 直径.

(2) 如图①, $\because$ 点 M , N 分别是 AB , AC 的中点,

$$\therefore MN = \frac{1}{2}BC,$$

$\therefore$ 当 BC 取得最大值时, MN 就取得最大值, 当 BC 是直径时, BC 最大,

连接 BO 并延长交 $\odot O$ 于点 C' , 连接 AC' ,

$\because BC'$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle BAC' = 90^\circ.$$

$$\because \angle ACB = 45^\circ, AB = 8,$$

$$\therefore \angle AC'B = 45^\circ,$$

$$\therefore BC' = \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8\sqrt{2},$$

$$\therefore MN_{\text{最大}} = 4\sqrt{2}.$$

故答案为: $4\sqrt{2}$.

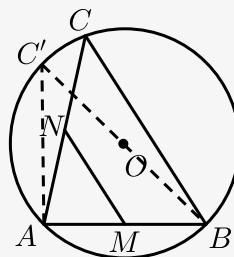


图 ①

【标注】 【能力】运算能力

【知识点】三角形的中位线

【知识点】解直角三角形

【知识点】探究特殊角的三角函数值

【知识点】勾股定理

【知识点】圆与三角函数

【知识点】圆的定义

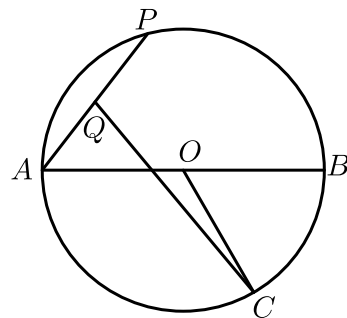
【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】圆中对称性

【知识点】垂径定理以及应用

23. 2019~2020学年11月天津和平区天津市第十九中学初三上学期月考第12题3分 ★★

如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， C 为 $\odot O$ 上一点，其中 $AB = 4$ ， $\angle AOC = 120^\circ$ ， P 为 $\odot O$ 上的动点，连 AP ，取 AP 中点 Q ，连 CQ ，则线段 CQ 的最大值为（ ）。



A. 3

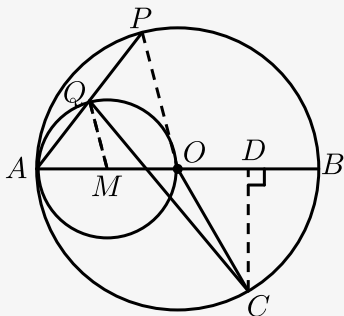
B. $1 + \sqrt{6}$

C. $1 + 3\sqrt{2}$

D. $1 + \sqrt{7}$

【答案】D

【解析】方法一：连接 PO ，取 AO 的中点 M ，



$$\therefore QM \parallel \frac{1}{2}PO, QM = \frac{1}{2}PO,$$

$$\because PO = 2,$$

$$\therefore QM = 1,$$

$\therefore$ 点 Q 的轨迹为以 M 为圆心的圆，

$\therefore$ 圆 M 外点 C 到圆上点 Q 的最大为 C, M, Q 三点共线时，

此时 $CQ = CM + MQ$ ，过 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，

$$\because \angle AOC = 120^\circ,$$

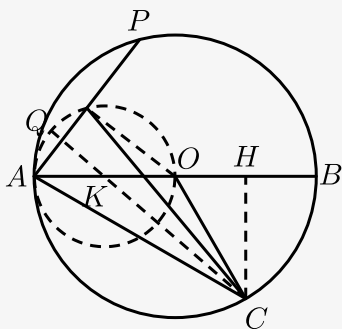
$$\therefore \angle COD = 60^\circ, \angle OCD = 30^\circ,$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2}OC = 1,$$

$$\therefore CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}, CM = \sqrt{DM^2 + CD^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore CQ_{\max} = CM + MQ = 1 + \sqrt{7}.$$

方法二：如图，连接 OQ ，作 $CH \perp AB$ 于 H ，



$$\therefore AQ = QP,$$

$$\therefore OQ \perp PA,$$

$$\therefore \angle AQO = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 Q 的运动轨迹为以 AO 为直径的 $\odot K$, 连接 CK ,

当点 Q 在 CK 的延长线上时, CQ 的值最大,

在 $\text{Rt}\triangle OCH$ 中,

$$\therefore \angle COH = 60^\circ, OC = 2,$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2}OC = 1, CH = \sqrt{3},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle CKH \text{ 中, } CK = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore CQ \text{ 的最大值为 } 1 + \sqrt{7}.$$

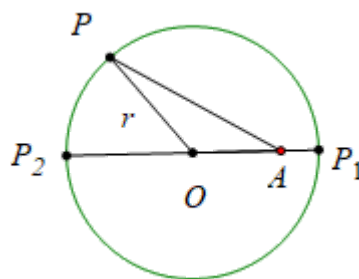
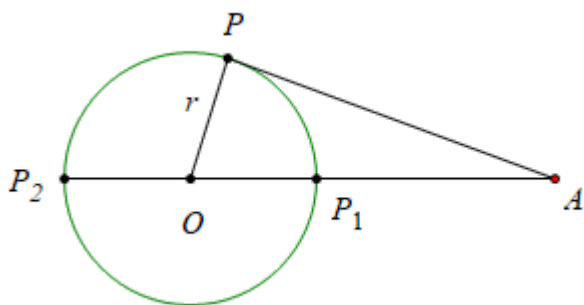
故选 D.

【标注】【知识点】圆与最值问题

4. 共线最值

定点与圆上的动点之间的距离：当定点、动点和圆心三点 共线 时有最大或最小值.

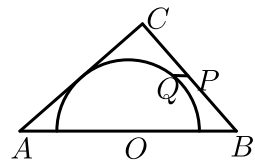
$$AP_{\max} = OA + r, \quad AP_{\min} = |OA - r|.$$



栗子12

24. 2016~2017学年江苏无锡宜兴市初三上学期期中周铁学区第10题3分 ★★★

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$, 以边 AB 的中点 O 为圆心, 作半圆与 AC 相切, 点 P , Q 分别是边 BC 和半圆上的动点, 连接 PQ , 则 PQ 长的最大值与最小值的和是 ().



A. 6

B. $2\sqrt{13} + 1$

C. 9

D. $\frac{32}{2}$

【答案】 C

【解析】 如图，设 $\odot O$ 与 AC 相切于点 E ，连接 OE ，作 $OP_1 \perp BC$ ，垂足为 P_1 交 $\odot O$ 于 Q_1 ，

此时垂线段 OP_1 最短， P_1Q_1 最小值为 $OP_1 - OQ_1$ ，

$\because AB = 10, AC = 8, BC = 6,$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2,$

$\therefore \angle C = 90^\circ,$

$\therefore \angle OP_1B = 90^\circ,$

$\therefore OP_1 \parallel AC.$

$\because AO = OB,$

$\therefore P_1C = P_1B,$

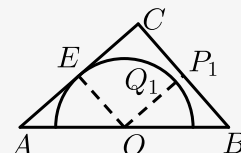
$\therefore OP_1 = \frac{1}{2}AC = 4,$

$\therefore P_1Q_1$ 最小值为 $OP_1 - OQ_1 = 1,$

当 Q_2 在 AB 边上时， P_2 与 B 重合时，

P_2Q_2 最大值 $= 5 + 3 = 8,$

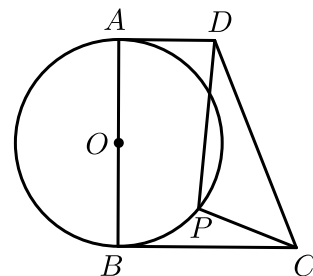
$\therefore PQ$ 长的最大值与最小值的和是9.



【标注】【知识点】与圆有关的动点、轨迹问题

25. 2014~2015学年湖北武汉青山区初三上学期期中第10题3分 ★★

已知： AB 是 $\odot O$ 的直径， AD 、 BC 是 $\odot O$ 的切线， P 是 $\odot O$ 上一动点，若 $AD = 3$ ， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ，则 $\triangle PCD$ 的面积的最小值是（ ）.



A. 2

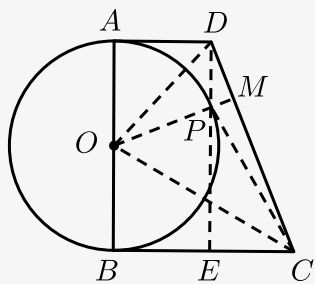
B. 4

C. 8

D. 9

【答案】 B

【解析】 过 O 作 $OM \perp CD$ 交 CD 于 M ，



交 $\odot O$ 于 P ,

此时 $\triangle PCD$ 面积最小.

过 D 作 $DE \perp BC$ 交 BC 于 E ,

$$\therefore DE = AB = 4,$$

$$EC = BC - AD = 3,$$

$$\therefore CD = 5.$$

连接 OD 、 OC ,

$$\therefore S_{\text{梯形}ABCD} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times (3+6) \times 4 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 6 + \frac{1}{2} \times OM \times 5,$$

$$\therefore OM = \frac{18}{5},$$

$$\therefore PM = OM - OP = \frac{8}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle CPD} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{5} \times 5 = 4.$$

【标注】【知识点】与圆有关的动点、轨迹问题